Musterlösung 6

1. **a)** Wir bemerken, dass es genügt, folgende Äquivalenz zu zeigen:

$$A, B \text{ sind unabhängig} \Leftrightarrow A, B^c \text{ sind unabhängig.}$$

Denn: wenden wir diese Äquivalenz auf A und B^c an, sehen wir, dass auch A und B^c genau dann unabhängig sind, wenn A^c und B^c unabhängig sind. Wegen $(B^c)^c = B$ genügt es sogar, die Implikation „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen. Wir nehmen also an, dass $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, und zeigen, dass daraus $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$ folgt.

Es gilt $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, wobei dies eine disjunkte Vereinigung ist, denn $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap (B \cap B^c) = A \cap \emptyset = \emptyset$. Daraus folgt

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A)P(B) + P(A \cap B^c).$$

Schliesslich erhalten wir

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c).$$

b) Nach Voraussetzung gilt $P(A \cap A_i) = P(A)P(A_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Weil die Ereignisse A_i paarweise disjunkt sind, sind auch die Mengen $A \cap A_i$ paarweise disjunkt. Daher gilt

$$\begin{aligned} P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^n P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A)P(A_i) \\ &= P(A)\left(\sum_{i=1}^n P(A_i)\right) = P(A)P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass die A_i disjunkt sind.

c) Wegen a) genügt es zu zeigen, dass A^c und B unabhängig sind.

Es gilt $P(A^c) = 0$. Da $A^c \cap B \subset A^c$, gilt wegen der Monotonie des Wahrscheinlichkeitsmasses, dass $P(A^c \cap B) = 0$. Also gilt auch $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$.

2. Für alle drei Teilaufgaben betrachten wir jeweils ein Laplace-Modell. Das Unabhängigkeitskriterium $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ist also äquivalent zum Kriterium $|A \cap B| = \frac{|A||B|}{|\Omega|}$.

a) Ziehen wir nur eine Karte, so gilt:

- $|\Omega| = 52$, da wir total 52 Karten haben,
- $|A| = 4$, weil es total 4 Könige gibt,

Bitte wenden!

- $|B| = 13$, weil es 13 Karten der Farbe Herz gibt, und
- $|A \cap B| = 1$, weil es nur genau ein Herz König gibt.

Also haben wir
$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{4 \times 13}{52} = 1 = |A \cap B|.$$
Somit sind A und B unabhängig.

b) Ziehen wir zwei Karten mit Zurücklegen, so erhalten wir:

- $|\Omega| = 52^2 = 2'704$,
- $|A| = 13 \times 4^2 = 208$,
- $|B| = 13^2 = 169$, weil es 13 Karten der Farbe Herz gibt, und
- $|A \cap B| = 13 \times 1^2$.

Also gilt
$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{208 \times 169}{2'704} = 13 = |A \cap B|.$$
Somit sind A und B unabhängig.

c) Ziehen wir zwei Karten ohne Zurücklegen, so erhalten wir:

- $|\Omega| = \binom{52}{2} = 1'326$,
- $|A| = 13 \times \binom{4}{2} = 78$, weil es pro Farbe 13 Karten gibt,
- $|B| = \binom{13}{2} = 78$, weil es 13 Karten der Farbe Herz gibt, und
- $|A \cap B| = 0$, weil es kein Paar der selben Farbe gibt.

Also gilt
$$\frac{|A||B|}{|\Omega|} = \frac{78 \times 78}{1'326} \approx 4.6 \neq 0 = |A \cap B|.$$
Somit sind A und B *nicht* unabhängig.

3. Wir haben ein Laplace-Modell mit $|\Omega| = 36$.

a) Für alle $(i, j) \in \Omega$ haben wir

$$\begin{aligned}
P(D_1 = i) &= \frac{|\{D_1 = i\}|}{36} = \frac{|\{(i, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_2 = 1, \dots, 6\}|}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \\
P(D_2 = j) &= \frac{|\{D_2 = j\}|}{36} = \frac{|\{(\omega_1, j) \in \Omega \mid \omega_1 = 1, \dots, 6\}|}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \\
P(D_1 = i, D_2 = j) &= \frac{|\{D_1 = i\} \cap \{D_2 = j\}|}{36} = \frac{|\{(i, j)\}|}{36} = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Ereignisse unabhängig sind, denn $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Siehe nächstes Blatt!

b) In ähnlicher Weise erhalten wir

$$\begin{aligned}
P(S=5) &= \frac{|\{S=5\}|}{36} = \frac{|\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}|}{36} = \frac{1}{9},\\
P(D_1 \text{ ist gerade}) &= \frac{|\{D_1 \text{ ist gerade}\}|}{36} = \frac{|\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega \mid \omega_1 = 2,4,6, \omega_2 = 1,\dots,6\}|}{36}\\
&= \frac{3\cdot 6}{36} = \frac{1}{2},\\
P(S=5, D_1 \text{ ist gerade}) &= \frac{|\{(2,3),(4,1)\}|}{36} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Ereignisse unabhängig sind, denn $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
P(S=6) &= \frac{|\{S=6\}|}{36} = \frac{|\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}|}{36} = \frac{5}{36},\\
P(D_2 \text{ ist gerade}) &= \frac{|\{D_2 \text{ ist gerade}\}|}{36} = \frac{|\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega \mid \omega_1 = 1,\dots,6, \omega_2 = 2,4,6\}|}{36}\\
&= \frac{6\cdot 3}{36} = \frac{1}{2},\\
P(S=6, D_2 \text{ ist gerade}) &= \frac{|\{(2,4),(4,2)\}|}{36} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Ereignisse *nicht* unabhängig sind, denn $\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{2} \neq \frac{1}{18}$.

d) Aus a) und b) folgt, dass $P(D_1 \text{ ist gerade}) = P(D_2 \text{ ist gerade}) = \frac{1}{2}$. Mit einer expliziten Rechnung kann man zeigen, dass

$$\begin{aligned}
P(D_1 \text{ ist gerade }, D_2 \text{ ist gerade}) &= \frac{|\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega \mid \omega_1 = 2,4,6, \omega_2 = 2,4,6\}|}{36}\\
&= \frac{3\cdot 3}{36} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P(D_1 \text{ ist ungerade }, D_2 \text{ ist ungerade}) &= \frac{|\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega \mid \omega_1 = 1,3,5, \omega_2 = 1,3,5\}|}{36}\\
&= \frac{3\cdot 3}{36} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
&P(S \text{ ist gerade})\\
&= P(D_1 \text{ ist gerade }, D_2 \text{ ist gerade}) + P(D_1 \text{ ist ungerade }, D_2 \text{ ist ungerade}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Es folgt $P(S \text{ ist gerade})P(D_1 \text{ ist gerade})P(D_2 \text{ ist gerade}) = \frac{1}{8}$. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\{S \text{ ist gerade}, D_1 \text{ ist gerade}, D_2 \text{ ist gerade}\} &= \{S \text{ ist gerade}, D_1 \text{ ist gerade}\}\\
&= \{S \text{ ist gerade}, D_2 \text{ ist gerade}\}\\
&= \{D_1 \text{ ist gerade}, D_2 \text{ ist gerade}\},
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

und alle diese Ereignisse haben demnach Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Weil $\frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$, sind die drei Ereignisse *nicht* unabhängig.
BEMERKUNG: Die Ereignisse sind jedoch *paarweise* unabhängig, denn $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.